ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΥΝΟΛΩΝ

α) Με αναγραφή των στοιχείων του

Ένα σύνολο που περιέχει τα στοιχεία x, y, z κ' μόνο αυτά θα το συμβολίζουμε με $\{x, y, z\}$

Η σειρά με την οποία αναγράφονται τα στοιχεία ενός συνόλου δεν έχει σημασία

Έτσι το ίδιο σύνολο μπορεί να παρασταθεί με $\{y, x, z\}$, $\{x, z, y\}$, $\{y, z, x\}$, $\{z, x, y\}$, $\{x, y, x\}$

β) Μέσω προτασιακού τύπου

Αν A το δοσμένο σύνολο κ' $P(x)$ προτασιακός τύπος (θα εξηγήσουμε παρακάτω) $B = \{x \in A : P(x)\}$ είναι ένα νέο σύνολο

Σημείωση: Ένα σύνολο μπορεί να είναι στοιχείο άλλων συνόλων. (Έτσι ένα σύνολο μπορεί να έχει ως στοιχεία του άλλα σύνολα). Έτσι π.χ. το $\{\emptyset\}$ είναι ένα σύνολο που περιέχει ως μόνο στοιχείο το σύνολο $\emptyset$.

πχς. (i) Αν $A = \{1, 5, 8\}$
$B = \{1, 8, 9, 10\}$
$\Gamma = \{5, 8\}$, τότε $\Gamma \subseteq A$, $\Gamma \subset A$, $A \not\subseteq B$ (διότι $5 \in A$ ενώ $5 \notin B$)

$B \not\subseteq A$ (διότι $9 \in B$ ενώ $9 \notin A$)

$\Gamma \not\subseteq B$ (διότι $5 \in \Gamma$ ενώ $5 \notin B$)
$A \not\subseteq \Gamma$, $B \not\subseteq \Gamma$

(ii) Η πρόταση $\emptyset \in \emptyset$ Ψ, γιατί το κενό δεν περιέχει τίποτα.
Η πρόταση $\emptyset \in \{\emptyset\}$ Α, στοιχείο του συνόλου (το $\{\emptyset\}$ είναι ένα σύνολο που περιέχει ως μόνο στοιχείο το $\emptyset$)

(iii) Η πρόταση $\alpha \in A$ ισοδυναμεί με την πρόταση $\{\alpha\} \subseteq A$

(iv) Η πρόταση $\{x, y\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ Α

υποσύνολα όχι στοιχεία

ενώ η πρόταση $\{x, y\} \subseteq \{\{x\}, \{x, y\}\}$ Ψ. (διότι $x \in \{x, y\}$ ενώ $x \notin \{\{x\}, \{x, y\}\}$)

Προτασιακοί τύποι

Εκφράσεις που περιέχουν μια (ελεύθερη) μεταβλητή ώστε όταν η μεταβλητή αυτή πάρει συγκεκριμένες τιμές γίνονται λογικές προτάσεις, λέγονται προτασιακοί τύποι.
Τους συμβολίζουμε με $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $P(y)$

πχ.

(i) $x>3$ $P(x)$

(ii) ο x είναι κάτοικος Ελλάδας $Q(x)$

(iii) ο αριθμός x διαιρεί το 24 $R(x)$

Για πχ όταν το x πάρει τιμή στους πραγματικούς αριθμούς η $P(x)$ μετατρέπεται σε πρόταση

Υπάρχουν προτασιακοί τύποι με δύο ή περισσότερες (ελεύθερες) μεταβλητές

πχ $x+y \geq 4$ είναι προτασιακός τύπος με δύο (ελεύθερες) μεταβλητές κ' συμβολίζεται $P(x,y)$

π.χ. $x>y$ $Q(x,y)$

π.χ $x^2+y^2+z^2=1$ είναι προτασιακός τύπος με τρεις μεταβλητές $R(x,y,z)$

Ποσοδείκτες

α) Ο προτασιακός τύπος "ο x διαιρεί το 24" με την προσθήκη του συμβόλου "για κάθε" γίνεται:
"Για κάθε x ο αριθμός x διαιρεί το 24"

Ένα ακόμα πχ:
Αν $P(x)$ είναι ο προτασιακός τύπος $x^2 \geq 0$ προκύπτει η πρόταση "$\forall x$ ισχύει $x^2 \geq 0$" η οποία συμβολίζεται $\forall x P(x)$

Το σύμβολο $\forall$ ονομάζεται καθολικός ποσοδείκτης.

β) Ο προτασιακός τύπος $R(x)$: "Ο αριθμός x διαιρεί το 24" με την προσθήκη του συμβόλου "υπάρχει" γίνεται:

"Υπάρχει αριθμός x ώστε ο x να διαιρεί το 24" η οποία συμβολίζεται

$$\exists x R(x)$$

Το σύμβολο "∃" ονομάζεται υπαρξιακός ποσοδείκτης.

Με τη λέξη "υπάρχει" εννοούμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα.

$$A \subseteq B \iff \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Σημείωση

Αν A ένα σύνολο κ' $P(x)$ ένας προτασιακός τύπος

α) Ο συμβολισμός $\exists x \in A\ P(x)$ χρησιμοποιείται ως συντομογραφία του συμβολισμού $\exists x (x \in A \wedge P(x))$

β) Ο συμβολισμός $\forall x \in A P(x)$ είναι συντομογραφία της πρότασης $\forall x (x \in A \Rightarrow P(x))$

Για οποιοδήποτε προτασιακό τύπο $P(x)$ η πρόταση $\exists x \in \emptyset\ P(x)$ είναι ψευδής

• η πρόταση $\forall x \in \emptyset\ P(x)$ είναι πάντα αληθής (αν ίσχυε Ψ, θα σήμαινε ότι το x ανήκε στο $\emptyset$)

Η άρνηση της πρότασης $\forall x P(x)$ είναι η πρόταση $\exists x (\sim P(x))$, δηλαδή

$$[\sim (\forall x P(x))] \iff \exists x (\sim P(x))$$

Η άρνηση της πρότασης $\exists x P(x)$ είναι η πρόταση $\forall x (\sim P(x))$, δηλαδή:

$$[\sim (\exists x P(x))] \iff \forall x (\sim P(x))$$

Φυλ 2 ασκ 6

p, q, r

Αν $p \Rightarrow (q \wedge r)$ κ' $q \Rightarrow (p \wedge (\sim r))$ A η $\sim(p \vee q)$ A

p	q	r	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	$(\sim r)$	$p \wedge (\sim r)$	$(p \vee q)$	$\sim(p \wedge q)$
A	A	A	A.	A	Ψ	Ψ	A	Ψ
A	A	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A	Ψ
A	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	Ψ
A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A	Ψ
Ψ	A	A	A	A	Ψ	Ψ	A	Ψ
Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A	Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	A
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	Ψ.	Ψ	A

Βλέπουμε ότι οι $p \Rightarrow (q \wedge r)$ κ' $q \Rightarrow (p \wedge (\sim r))$ είναι ταυτόχρονα αληθείς μόνο στην 7η κ' 8η σειρά.
Σε αυτές τις δύο σειρές η $\sim(p \vee q)$ είναι αληθής.
Άρα ισχύει η $\Rightarrow$ του ερωτήματος.

Η $\sim(p \vee q)$ είναι αληθής μόνο στην 7η κ' 8η σειρά στις οποίες είναι αληθείς οι $p \Rightarrow (q \wedge r)$ κ' $q \Rightarrow (p \wedge (\sim r))$. Άρα ισχύει κ' το αντίστροφο.

ασκ 7

p	q	r	$(\sim r)$	$p \Rightarrow (\sim r)$	$(\sim q)$	$p \Rightarrow (\sim q)$	$[\sim(p \Rightarrow (\sim q))]$	$p \Rightarrow (\sim r) \wedge [\sim(p \Rightarrow (\sim q))]$
A	A	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	Ψ
A	A	Ψ	A	A	Ψ	Ψ	A	A
A	Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A	Ψ	Ψ
A	Ψ	Ψ	A	A	A	A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	A	Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	A	A	Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	A	A	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A	A	Ψ	Ψ

Ο Αλέξανδρος κ' η Άννα είναι φοιτητές, ενώ ο Αντώνης όχι

Αν $P(x,y)$ είναι προτασιακός τύπος με δύο (ελεύθερες) μεταβλητές

(i) Οι $\forall x P(x,y)$ κ' $\exists x P(x,y)$ είναι προτασιακοί τύποι με μία μεταβλητή την y

(ii) Οι $\forall y P(x,y)$ κ' $\exists y P(x,y)$ είναι προτασιακοί τύποι με μία μεταβλητή, την x.

(iii) Οι $\forall x \forall y P(x,y)$ κ' $\forall y \forall x P(x,y)$ είναι προτάσεις κ' μάλιστα είναι ισοδύναμες

(iv) Οι $\exists x \exists y P(x,y)$ κ' $\exists y \exists x P(x,y)$ είναι προτάσεις κ' μάλιστα είναι ισοδύναμες

(v) Οι $\forall x \exists y P(x,y)$ κ' $\exists y \forall x P(x,y)$ είναι προτάσεις όχι ισοδύναμες

Αν $P(x,y)$ είναι ο προτασιακός τύπος $x=y$
η πρόταση $\forall x \exists y P(x,y)$ είναι αληθής ενώ η πρόταση $\exists y \forall x P(x,y)$ είναι ψευδής

Σημείωση γενικά η πρόταση $\exists y \forall x P(x,y)$ συνεπάγεται την $\forall x \exists y P(x,y)$ αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο.

(vi) Για τους ίδιους λόγους οι $\forall y \exists x P(x,y)$ κ' $\exists x \forall y P(x,y)$ είναι προτάσεις οι οποίες δεν είναι ισοδύναμες

Πράξεις μεταξύ συνόλων

Αν A, B είναι δύο σύνολα. Η τομή των A, B είναι το σύνολο $A \cap B = \{x, x \in A \wedge x$
Η ένωση των A, B είναι το σύνολο $A \cup B = \{x, x \in A \vee x \in B\}$

Ιδιότητες τομής κ' Ιδιότητες τομής

Για οποιαδήποτε σύνολα Α, Β, Γ.

(i) $A\cap A=A$ (i) $A\cup A=A$

(ii) $A\cap B=B\cap A$ αντιμεταθετική   (ii) $A\cup B=B\cup A$

(iii) $(A\cap B)\cap\Gamma=A\cap(B\cap\Gamma)$ προσεταιριστική   (iii) $(A\cup B)\cup\Gamma=A\cup(B\cup\Gamma)$

(iv) $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$ (iv) $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$

(v) $A\cap\emptyset=\emptyset$, $\emptyset\cap A=\emptyset$ (v) $A\cup\emptyset=A$, $\emptyset\cup A=A$

Ενδεικτικά ας δούμε την απόδειξη της $A\cap B=B\cap A$

Έστω τυχόν x

$x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\Leftrightarrow x\in B\wedge x\in A$

χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η $p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$ είναι ταυτολογία

$\Leftrightarrow x\in B\cap A$

Για να δείξω ότι $\Gamma\subseteq\Delta$

$\forall x(x\in\Gamma\Rightarrow x\in\Delta)$

Για ισο $\Gamma=\Delta$

$\forall x(x\in\Gamma\Leftrightarrow x\in\Delta)$

Ομοίως η (iii) αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας ότι $(p\wedge q)\wedge r\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$ είναι ταυτολογία

Το γεγονός ότι η τομή είναι προσεταιριστική μας επιτρέπει να γράφουμε $A\cap B\cap\Gamma$ παραλείποντας τις παρενθέσεις

Ομοίως για την ένωση

Για οποιαδήποτε σύνολα Α, Β, Γ ισχύει $A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$

(επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την ένωση

Απόδειξη:

Έστω τυχαίο x $x\in A\cap(B\cup\Gamma) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B\cup\Gamma \Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B \vee x\in\Gamma) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in\Gamma) \Leftrightarrow x\in A\cap B \vee x\in A\cap\Gamma \Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$

$\Leftrightarrow$ ↑ χρησιμοποιάμε το γεγονός ότι η $p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\vee q)\vee(p\wedge r)$ είναι ταυτολογία

Επομένως $A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$

~~Απόδειξη~~ $A\cup(B\cap\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$ για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ

Απόδειξη: παρόμοια.

Έστω τυχαίο x $x\in A\cup(B\cap\Gamma) \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B\cap\Gamma \Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in\Gamma) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in\Gamma) \Leftrightarrow x\in A\cup B\wedge x\in A\cup\Gamma \Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$ ταυτολογία.

Ορισμός: Δύο σύνολα A, B λέγονται ξένα αν $A\cap B=\emptyset$.

Διαφορά δύο συνόλων: $A\overset{\text{μείον}}{-}B=\{x\in A : x\notin B\}$ δηλαδή το A − B περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν στο A κ' δεν ανήκουν στο B.

Ιδιότητες:

Για οποιαδήποτε σύνολα A, B

(i) $A-B\subseteq A$

(ii) $A-A=\emptyset$

(iii) $\emptyset-A=\emptyset$

(iv) $A-\emptyset=A$

ας δούμε την (i)

Για τυχαίο x $x\in A-B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B \Rightarrow x\in A$ χρησιμοποιάμε το γεγονός ότι η $p\wedge q\Rightarrow p$ είναι ταυτολογία

Άρα $A-B\subseteq A$

Παρατήρηση: Από τους ορισμούς έχουμε το εξής:

(i) $x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B$

(ii) $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B$

(iii) $x\in A-B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B$

$\sim(p\wedge q) \Leftrightarrow (\sim p)\vee(\sim q)$ είναι ταυτολογία

Παρατήρηση (i) $x\notin A\cap B \Leftrightarrow \sim(x\in A\cap B) \Leftrightarrow \sim(x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow \sim(x\in A)\vee\sim(x\in B)$

$\Leftrightarrow x\notin A \vee x\notin B$

$\sim(p\vee q) \Leftrightarrow (\sim p)\wedge(\sim q)$ είναι ταυτολογία

(ii) $x\notin A\cup B \Leftrightarrow \sim(x\in A\cup B) \Leftrightarrow \sim(x\in A \vee x\in B)$

$\Leftrightarrow (\sim(x\in A))\wedge(\sim(x\in B)) \Leftrightarrow x\notin A \wedge x\notin B$

(iii) $x\notin A-B \Leftrightarrow \sim x\in A-B \Leftrightarrow \sim(x\in A \wedge x\notin B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim(x\in A)\vee \sim(x\notin B) \Leftrightarrow \sim(x\in A)\vee\sim(\sim(x\in B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim(x\in A)\vee x\in B \Leftrightarrow x\notin A \vee x\in B$

Συμμετρική διαφορά δύο συνόλων

Αν A, B είναι δύο σύνολα ορίζουμε $A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$

το σύνολο αυτό ονομάζεται συμμετρική διαφορά των A, B

Παρατήρηση

Αν A κ' B είναι δύο σύνολα κ' $P(x)$ κ' $Q(x)$ είναι δύο προτασιακοί τύποι ώστε $P(x)\Leftrightarrow x\in A$

$Q(x)\Leftrightarrow x\in B$

(δηλαδή τα A, B είναι τα σύνολα αλήθειας των $P(x), Q(x)$ αντίστοιχα)

τότε, το $A\cap B$ είναι το σύνολο αλήθειας του $P(x)\wedge Q(x)$

$A\cup B$ — $P(x)\vee Q(x)$

$A-B$ — $P(x)\wedge(\sim Q(x))$

$A\triangle B$ — $P(x)\veebar Q(x)$

πχ. $A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,5,6,7\}$ $\Gamma=\{7,8,9\}$

$A\cap B=\{1\}$

$A\cup B=\{1,2,3,5,6,7\}$

$A-B=\{2,3\}$

$B-A=\{5,6,7\}$

$A\triangle B=\{2,3,5,6,7\}$

$A\cap B\cap \Gamma=\emptyset$

$A\cup B\cup \Gamma=\{1,2,3,5,6,7,8,9\}$

Ασκ.

Αν A, B σύνολο

$A\subseteq B \Leftrightarrow A-B=\emptyset$

Λύση: Για να αποδείξουμε την ισοδυναμία 2 προτάσεων αρκεί να αποδείξουμε την ισοδυναμία των αρνήσεών τους, διότι η $(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow((\sim p)\Leftrightarrow(\sim q))$ είναι ταυτολογία.

$$\begin{aligned}
\sim(A\subseteq B) &\Leftrightarrow \sim(\forall x(x\in A\Rightarrow x\in B))\\
&\Leftrightarrow \exists x(\sim(x\in A\Rightarrow x\in B))\\
&\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge(\sim(x\in B)))\\
&\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\notin B)\\
&\Leftrightarrow \exists x(x\in A-B)\\
&\Leftrightarrow A-B\neq\emptyset\\
&\Leftrightarrow \sim(A-B=\emptyset)
\end{aligned}$$

Ασκ.

$A-B=A-(A\cap B)$

Απόδειξη

Για τυχαίο x $x\in A-(A\cap B)\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin A\cap B)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin B)\\
&\Leftrightarrow \underbrace{(x\in A\wedge x\notin A)}\vee(x\in A\wedge x\notin B)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\\
&\Leftrightarrow x\in A-B
\end{aligned}$$

$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ ταυτολογία

Άρα $A-B=A-(A\cap B)$

Άσκ να δο $(A\cap B) - \Gamma = (A\cap B) - (A\cap\Gamma)$

Λύση.

Έστω τυχόν x.

$x\in (A\cap B) - (A\cap\Gamma)$ ——

$\Leftrightarrow x\in A\cap B \wedge x\notin A\cap\Gamma \Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\wedge(x\notin A\vee x\notin\Gamma)$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x\in A\wedge x\in B)\wedge(x\notin A)}_{\text{πάντα ψευδής}}\vee(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\notin\Gamma)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\wedge x\notin\Gamma$

$\Leftrightarrow x\in A\cap B\wedge x\notin\Gamma$

$\Leftrightarrow x\in(A\cap B)-\Gamma$

Επομένως, $x\in(A\cap B)-\Gamma \Leftrightarrow x\in(A\cap B)-(A\cap\Gamma)$

Άσκ Να δο $A\cup(B-A) = A\cup B$

Λύση: Έστω τυχούσ x $\quad x\in A\cup(B-A) \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B-A$

$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\notin A)$

$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge\underbrace{(x\in A\vee x\notin A)}_{\text{πάντα αληθής}}$

$\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B$

$\Leftrightarrow x\in A\cup B$

Επομένως, $A\cup(B-A)\ A\cup B$

Άσκ Να δο η πράξη της διαφοράς συνόλων δεν ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα (δηλ να βρεθούν τρία σύνολα A, B, Γ ώστε $A-(B-\Gamma)\neq((A-B)-\Gamma$

Λύση: πχ για $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3\}$, $\Gamma=\{2,4\}$

$A-(B-\Gamma)=\{1,2,3,4\}-\{3\}=\{1,2,4\}$

$(A-B)-\Gamma=\{1,4\}-\{2,4\}=\{1\}$

Ασκ. Αν Κ, Λ δύο σύνολα να δειχθεί η ισοδυναμία $K \cup \Lambda \subseteq K \cap \Lambda \Leftrightarrow K = \Lambda$

Λύση: $\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $K=\Lambda$ τότε $K \cup \Lambda = K \cup K = K$ } άρα $K \subseteq K$ επίσης

$K \cap \Lambda = K \cap K = K$ } έχουμε $K \cup \Lambda \subseteq K \cap \Lambda$

$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $K \cup \Lambda \subseteq K \cap \Lambda$

Θέλουμε ισο $K = \Lambda$ δηλ. ότι ισχύει $K \subseteq \Lambda$ κ' $\Lambda \subseteq K$

$K \subseteq K \cup \Lambda \subseteq K \cap \Lambda \subseteq \Lambda$

ισχύει πάντα, από την υπόθεση, ισχύει πάντα

$\Lambda \subseteq K \cup \Lambda \subseteq K \cap \Lambda \subseteq K$

$\Rightarrow K = \Lambda$

Ασκ. Αν A, B είναι δύο σύνολα ισο είναι ισοδύναμα.

$A - B = B - A \Leftrightarrow A = B$

Λύση:

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $A = B$, τότε $A - B = A - A = \emptyset$
$B - A = A - A = \emptyset$ } $A - B = B - A$

$\Rightarrow$) Υποθέτουμε λοιπόν ότι $A - B = B - A$

Θέλουμε ισο $A = B$ δηλ. ότι $A \subseteq B$ κ' ότι $B \subseteq A$.

Δείχνουμε ότι $A \subseteq B$

Έστω τυχόν x. με $x \in A$

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x \notin B$,

τότε $x \in A - B$ κ' επίσης από υπόθεση

$A - B = B - A$ προκύπτει $x \in B - A$, άρα

$x \in B$ κ' $x \notin A$ άτοπο.

Επομένως $x \in B$, έτσι αποδείχνουμε ότι $A \subseteq B$

Δείχνουμε ότι $B \subseteq A$ ομοίως.